

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота магістра

на тему

«Задача про повернення початку координат в силу
лінійних систем»

Виконала: студентка групи МП61
II курсу (другий магістерський рівень)
спеціальності 113 Прикладна математика
ОПП Прикладна математика
Прогнімак О.С.

Керівник

кандидат ф.-м. наук

Сморцова Т. І.

Рецензент

доктор ф.-м. наук, проф. Ігнатович С.Ю.

Харків 2022

Зміст

1. Вступ.....	3
2. Означення.....	4
3. Приклади розв'язання задач для лінійних систем другого порядку.....	7
4. Приклади розв'язання задач для лінійних систем третього порядку.....	17
5. Умова повертатності для трикутних систем.....	21
6. Умова повертатності для довільних лінійних систем другого порядку, матриця яких має дійсні різні власні значення	29
7. Висновки.....	34
8. Список літератури.....	35

1. Вступ

Математична теорія керування почала інтенсивно розвиватися в середині 20 століття. Її виникнення пов'язане з необхідністю розв'язувати нові на той час завдання, перш за все, задачі керування механічними об'єктами, рух яких описується диференціальними рівняннями. Значний внесок в її створення внесли Л.С. Понтрягін, В.Г. Болтянський, Р.В. Гамкрелідзе, Е.Ф. Міщенко, Р. Калман, Р. Беллман, і багато інших. Принцип максимуму [5] послужив основою математичної теорії керованих процесів. Подальший розвиток теорії керування пов'язаний як з прикладними задачами, так і з дослідженням задач керування як суто математичних задач. Так виникли і сформувалися такі напрямки в математичній теорії керування як керованість, ідентифікація систем, теорія оптимального керування, синтез керування для різних типів систем та інші.

Теорія керування лінійними системами у скінченновимірних просторах була в центрі уваги математиків протягом трьох десятиліть у 1960–1990 рр. На даний момент ця теорія досить добре розвинена. Однак деякі питання залишаються відкритими, що вимагає подальшого розгляду, враховуючи їх теоретичний інтерес, а також важливу роль у прикладних задачах. Крім того, розвиток теорії керування лінійними системами є важливим і для нелінійної теорії керування, оскільки одним із методів дослідження нелінійних керованих систем є відображення на лінійні керовані системи або вибір відповідної лінійної апроксимації. Одним із питань, які досліджуються сучасними математиками, є керованість лінійних систем з обмеженнями на керування. В цій роботі будемо досліджувати системи, які мають вигляд:

$$\dot{x} = Ax + bu, x \in \mathbb{R}^n, u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r \quad (1.1)$$

де A – дійсна матриця та b – дійсний вектор.

Керування $u(t)$, $t \in [0, T]$ називається допустимим, якщо вектор-функція $u(t)$ сумовна та задовольняє обмеження $u(t) \in \Omega$ для $t \in [0, T]$.

Задача керованості для таких систем найчастіше розглядалась у випадку попадання в точку спокою. В той же час, у більш загальній постановці задачі (тобто коли Ω – довільна множина), природно розглядати задачу керованості в кінцеву точку, яка не є точкою спокою системи (1.1). Однак питання про конструктивні критерії керованості в кінцеву точку, яка не є точкою спокою системи (1.1), залишається відкритим.

Виявляється, що на відміну від задачі попадання в точку спокою, виникає додаткова умова. Цю умову введено в роботі [1] та названо умовою повертайності на деякому відрізку. Ця умова означає можливість дістатися із кінцевої точки в себе в силу системи (1.1) за будь-який час T за допомогою допустимого керування.

Ця умова повертайності є принципово новою у порівнянні з умовою повертайності за деякий час, яка розглядалась раніше. Властивості множин точок повертайності (тобто точок, для яких виконується умова повертайності за деякий час) досліджувались Conti R., Bianchini R.M. та іншими.

2. Означення.

Сформулюємо декілька означень та результатів з роботи [1], які будемо використовувати в роботі.

Розглянемо систему

$$\dot{x} = Ax + \varphi(u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r, \quad (2.1)$$

де A – дійсна матриця, а $\varphi(u)$ – дійсна неперервна n -вимірна функція.

Дослідимо задачу попадання в початок координат із довільної початкової точки в силу системи (2.1) під дією допустимого керування. Позначимо через $S(T)$ множину нуль-керованості системи (2.1) за час $T >$

0, тобто множину, із довільної точки x_0 якої можна дістатися початку координат за час T в силу системи (2.1) під дією допустимого керування $u = u(t)$.

Оскільки $x(t)$ – розв'язок задачі Коші

$$\dot{x} = Ax + \varphi(u), \quad x(0) = x_0, \quad (2.2)$$

має вигляд

$$x(t) = e^{At} \left(x_0 + \int_0^t e^{-A\tau} \varphi(u(\tau)) d\tau \right), \quad t \in [0, T],$$

то множина нуль-керуваності $S(T)$ має вигляд

$$S(T) = \left\{ x_0 \in \mathbb{R}^n : x_0 = - \int_0^T e^{-A\tau} \varphi(u(\tau)) d\tau, u \in \Omega, t \in [0, T] \right\}.$$

Означення 1. Система (2.1) називається 0-керуваною, якщо $0 \in \text{int } S$, де $S = \bigcup_{T>0} S(T)$ – множина 0-керуваності системи (2.1) за довільний час. Це означає, що існує траєкторія системи (2.1), яка відповідає допустимому керуванню та починається в точці x_0 при $t = 0$ і в момент часу $t = T$ закінчується в нулі.

Зауважимо, що початок координат є точкою спокою системи (2.1), якщо $0 \in \varphi(\Omega)$, тобто якщо існує керування $u_0 \in \Omega$ таке, що $\varphi(u_0) = 0$. Це означає, що $x(0) \equiv 0$ є розв'язком задачі Коші (2.2) з $x(0) = 0$ та $u(t) \equiv u_0$, $t > 0$.

Якщо система (2.1) є нуль-керуваною, тобто $0 \in \text{int } S$, тоді для деякого $T > 0$ маємо, що $0 \in \text{int } S(T)$. Це означає, що існує траєкторія системи (2.1), що відповідає допустимому керуванню, яка починається у початку координат при $t = 0$ і закінчується у вихідній точці в момент $t = T$. У цьому випадку говоримо, що початок може бути повернуто в силу системи (2.1) за час T або що для системи (2.1) виконується умова повертайності за час T .

Тепер розглянемо умову повертайності на відрізку.

Означення 2. Будемо говорити, що для системи (2.1) виконується умова повертайності на відрізку $I = [T^*, T^* + a]$, де $a > 0, T \geq 0$, якщо для будь-якого $T \in I$ існує допустиме керування $u_T(t)$ таке, що розв'язок $x(t)$ задачі Коші $\dot{x} = Ax + \varphi(u_T(t)), x(0) = 0$, задовольняє умову $x(T) = 0$.

Іншими словами, це означає, що початок координат може бути повернуто в силу системи (2.1) за будь-який час $T \in I$. Умова повертайності на відрізку I означає, що для будь-якого $T \in I$ існує функція $u_T(t) \in \Omega, t \in [0, T]$, така що $\int_0^T e^{-A\tau} \varphi(u_T(\tau)) d\tau = 0$.

Для лінійної системи (1.1) за формулою Коші розв'язок задачі Коші $\dot{x} = Ax + bu_T(t), x(0) = 0$, має вигляд

$$x(t) = e^{A(t-0)}0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} bu_T(\tau) d\tau.$$

Підставляючи $t = T$ одержуємо, що

$$0 = x(T) = \int_0^T e^{A(T-\tau)} bu_T(\tau) d\tau,$$

звідки маємо, що

$$0 = e^{AT} \int_0^T e^{-A\tau} bu_T(\tau) d\tau.$$

Помножимо на e^{-AT} зліва і отримаємо

$$\int_0^T e^{-A\tau} bu_T(\tau) d\tau = 0.$$

Умова повертайності на відрізку означає, що для будь-якого $T \in I$ існує функція $u_T(t) \in \Omega, t \in [0, T]$ така, що

$$\int_0^T e^{-At} bu_T(t) dt = 0. \quad (2.3)$$

Якщо нуль є точкою спокою системи (1.1), то умова повертайності виконується на будь-якому відрізку. В роботі [1] доведено, що умова повертайності на відрізку є необхідною умовою 0-керуваності системи (1.1).

За умови виконання умови повертайності природно розглядати задачу про оптимальне за часом керування, яке переводить початок координат до початку координат за мінімально можливий додатний час $T > 0$.

Лема 1 [1]. Нехай для системи (2.1) виконується умова повертайності на відрізку I . Тоді початок координат можна повернути в силу системи (2.1) за будь-який час $T \geq T_1$.

Наслідок з Лемми 1. Нехай для системи (2.1) виконується умова повертайності на відрізку $[0, a]$ ($a > 0$). Тоді початок координат можна повернути за будь-який час $T \geq 0$.

Теорема 1 [1]. Система (2.1) є нуль-керованою тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:

- (i) виконується умова повертайності на деякому відрізку $I = [T^*, T^* + a]$ ($a > 0, T^* \geq 0$);
- (iia) не існує власного вектора v матриці A^* , що відповідає дійсному власному значенню, такого що $(v, \varphi(u)) \geq 0$ для будь-яких $u \in \Omega$;
- (iib) не існує власного вектора $v = w_1 + iw_2$ матриці A^* , який відповідає недійсному власному значенню, такого, що $(w_1, \varphi(u)) = (w_2, \varphi(u)) = 0$ для будь-яких $u \in \Omega$.

3. Приклади розв'язання задач для лінійних систем другого порядку

Дослідимо виконання умови повертайності для лінійних систем другого порядку з керуваннями, які мають різну кількість точок перемикання.

Задача 3.1. Розглянемо канонічну керовану систему другого порядку:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \quad \text{з обмеженням на керування } |u| \leq 1. \quad (3.1)$$

Перевіримо виконання умови повертальності на відрізку для системи (3.1) з кусково-сталим керуванням, яке має одну точку перемикання.

Спочатку знайдемо фундаментальну матрицю системи (3.1). Для цієї системи матриця A та вектор b мають вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Власні числа матриці A дорівнюють 0. Тоді матриця e^{At} буде мати вигляд

$$e^{At} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} A^s = \frac{t^0}{0!} A^0 + \frac{t}{1!} A = E + tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектор $e^{-At}b$ знайдемо, замінивши t на $-t$:

$$e^{-At}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що існує допустиме керування, яке повертає початок координат за час T . Розглянемо кусково-стале керування $u(t)$ з однією точкою перемикання t_1 :

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1) \\ -1, & t \in [t_1, T] \end{cases}, \quad 0 < t_1 < T. \quad (3.2)$$

Умова повертальності за час T означає, що $\int_0^T e^{-At} b u(t) dt = 0$.

Підставляючи $u(t)$ вигляду (3.2), маємо, що

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{-At} bu(t) dt &= \int_0^{t_1} e^{-At} bu(t) dt + \int_{t_1}^T e^{-At} bu(t) dt = \\
&= \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} dt - \int_{t_1}^T \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} t_1 \\ -\frac{t_1^2}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T-t_1 \\ -\frac{T^2}{2} + \frac{t_1^2}{2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} t_1 - T + t_1 \\ -\frac{t_1^2}{2} + \frac{T^2}{2} - \frac{t_1^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t_1 - T \\ -t_1^2 + \frac{T^2}{2} \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Ця система має єдиний розв'язок:

$$\begin{cases} 2t_1 = T \\ t_1^2 = \frac{T^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{T}{2} \\ t_1 = \frac{T}{\sqrt{2}} \end{cases},$$

що є можливим лише при $T = 0$. Отже, використовуючи керування з одним перемиканням вигляду (3.2), неможливо повернути нуль в нуль в силу системи (3.1).

Задача 3.2. Перевіримо виконання умови повертальності на відрізку для системи (3.1) з кусково-сталим керуванням, яке має дві точки перемикання t_1 та t_2 . Таке керування має вигляд:

$$u = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1) \cup [t_2, T], \\ -1, & t \in [t_1, t_2). \end{cases} \quad 0 < t_1 < t_2 < T. \quad (3.3)$$

Підставляючи $u(t)$ вигляду (3.3) в умову повертальності (2.3), маємо

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{-At} bu(t) dt &= \int_0^{t_1} e^{-At} bu(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-At} bu(t) dt + \int_{t_2}^T e^{-At} bu(t) dt = \\
&= -\int_0^{t_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} dt + \int_{t_1}^{t_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} dt - \int_{t_2}^T \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} dt = \\
&= -\begin{pmatrix} t_1 \\ -\frac{t_1^2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_2 - t_1 \\ -\frac{t_2^2}{2} + \frac{t_1^2}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T - t_2 \\ -\frac{T^2}{2} + \frac{t_2^2}{2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -t_1 + t_2 - t_1 - T + t_2 \\ \frac{t_1^2}{2} - \frac{t_2^2}{2} + \frac{t_1^2}{2} + \frac{T^2}{2} - \frac{t_2^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t_1 + 2t_2 - T \\ t_1^2 - t_2^2 + \frac{T^2}{2} \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Отже, маємо систему, яка має єдиний розв'язок, для знаходження моментів перемикання t_1 та t_2 :

$$\begin{cases} -2t_1 + 2t_2 = T \\ -t_1^2 + t_2^2 = \frac{T^2}{2} \end{cases} .$$

Розв'язавши цю систему відносно t_1, t_2 , знайдемо, що

$$\begin{cases} t_1 = \frac{T}{4}, \\ t_2 = \frac{3T}{4}. \end{cases}$$

Тоді керування, яке розв'язує задачу повертальності початку координат в силу системи (3.1), набуває вигляду:

$$u = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, \frac{T}{4}\right) \cup \left[\frac{3T}{4}, T\right], \\ -1, & t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right). \end{cases} \quad (3.4)$$

Знайдемо траєкторію системи (3.1), яка відповідає знайденому керуванню.

Нехай $t \in \left[0, \frac{T}{4}\right)$, тоді маємо задачу Коші

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1, & x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = x_1, & x_2(0) = 0, \end{cases}$$

розв'язок якої має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = \frac{t^2}{2}, \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{T}{4}\right).$$

Ця частина траєкторії зображена на рис. 1.

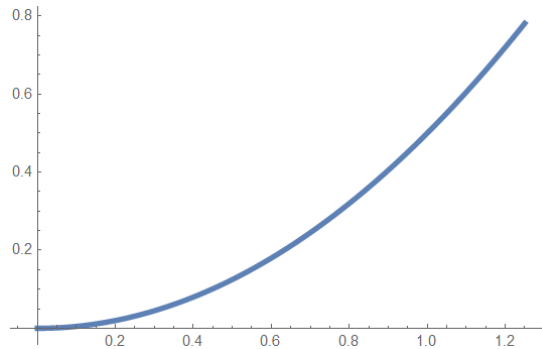


Рис. 1.

Для $t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right)$ маємо задачу Коші

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -1, \\ \dot{x}_2 = x_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1\left(\frac{T}{4}\right) = \frac{T}{4}, \\ x_2\left(\frac{T}{4}\right) = \frac{T^2}{32}, \end{cases}$$

розв'язок якої має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = -t + \frac{T}{2}, \\ x_2 = -\frac{t^2}{2} + \frac{T}{2}t - \frac{T^2}{16}, \end{cases} \quad t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right).$$

Ця частина траєкторії зображена на рис. 2.

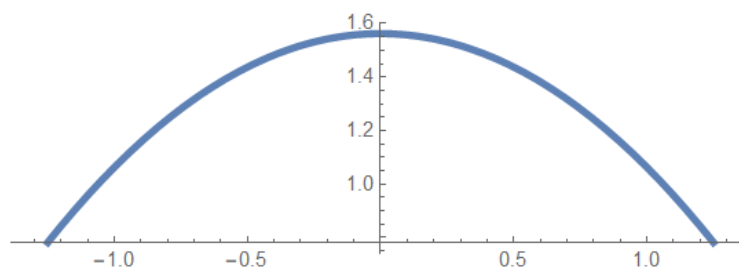


Рис. 2.

I, нарешті, для $t \in \left[\frac{3T}{4}, T\right]$ маємо задачу Коші

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 1, \\ \dot{x}_2 = x_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1\left(\frac{3T}{4}\right) = -\frac{T}{4}, \\ x_2\left(\frac{3T}{4}\right) = \frac{T^2}{32}, \end{cases}$$

розв'язок якої має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = t - T, \\ x_2 = \frac{t^2}{2} - Tt + \frac{T^2}{2}. \end{cases}$$

Зазначимо, що $x_1(T) = 0$, $x_2(T) = 0$. Ця частина траєкторії зображена на рис. 3.

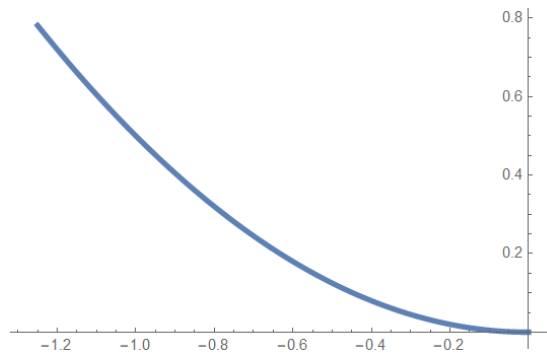


Рис. 3.

Отже, траєкторія системи (3.1), яка відповідає керуванню (3.4), має такий вигляд:

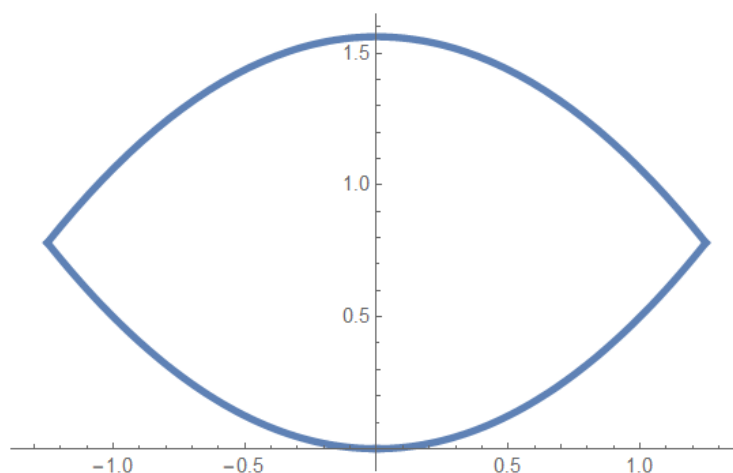


Рис. 4.

Таким чином, умова повертайності початку координат в силу системи (3.1) виконується, якщо розглядати керування, які мають дві точки перемикання. І при кожному заданому T маємо єдине керування, яке розв'язує цю задачу.

Наведемо результати роботи програми для різних значень T . Так, для $T = 10$ та для $T = 7$, маємо результати, які зображено на рис. 5. та рис. 6.

Червоним зображені графіки координат $x_1(t)$ (тонка лінія), $x_2(t)$ (товста лінія) та фазова траєкторія, які відповідають значенню $T = 10$. Синім зображені графіки координат та фазова траєкторія, які відповідають значенню $T = 7$.

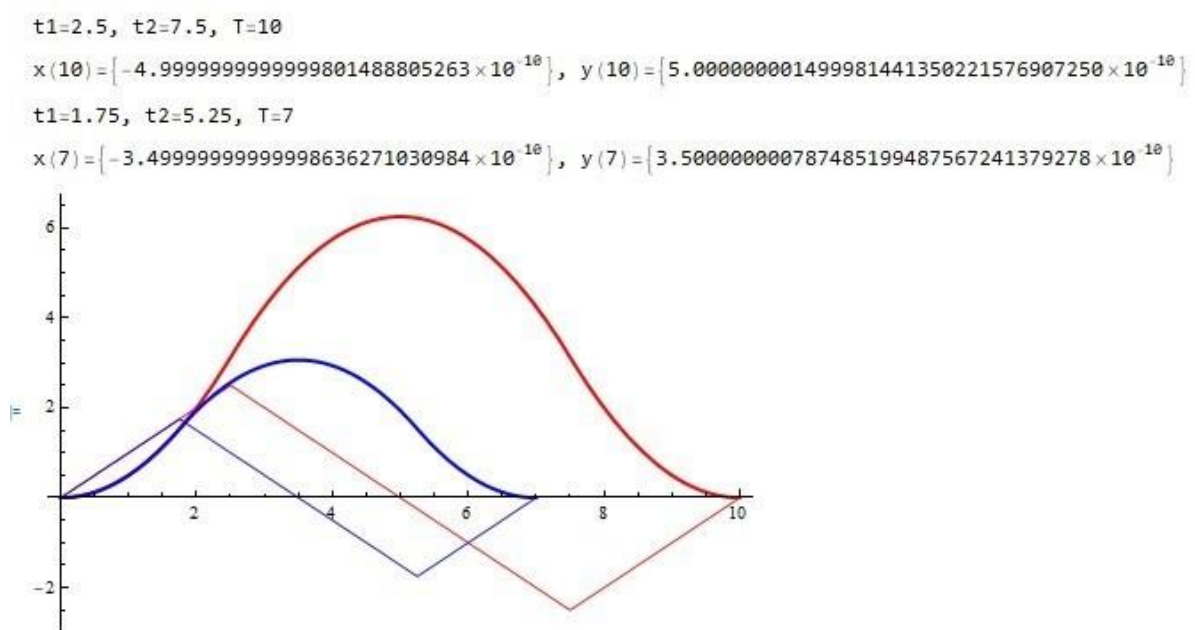


Рис. 5.

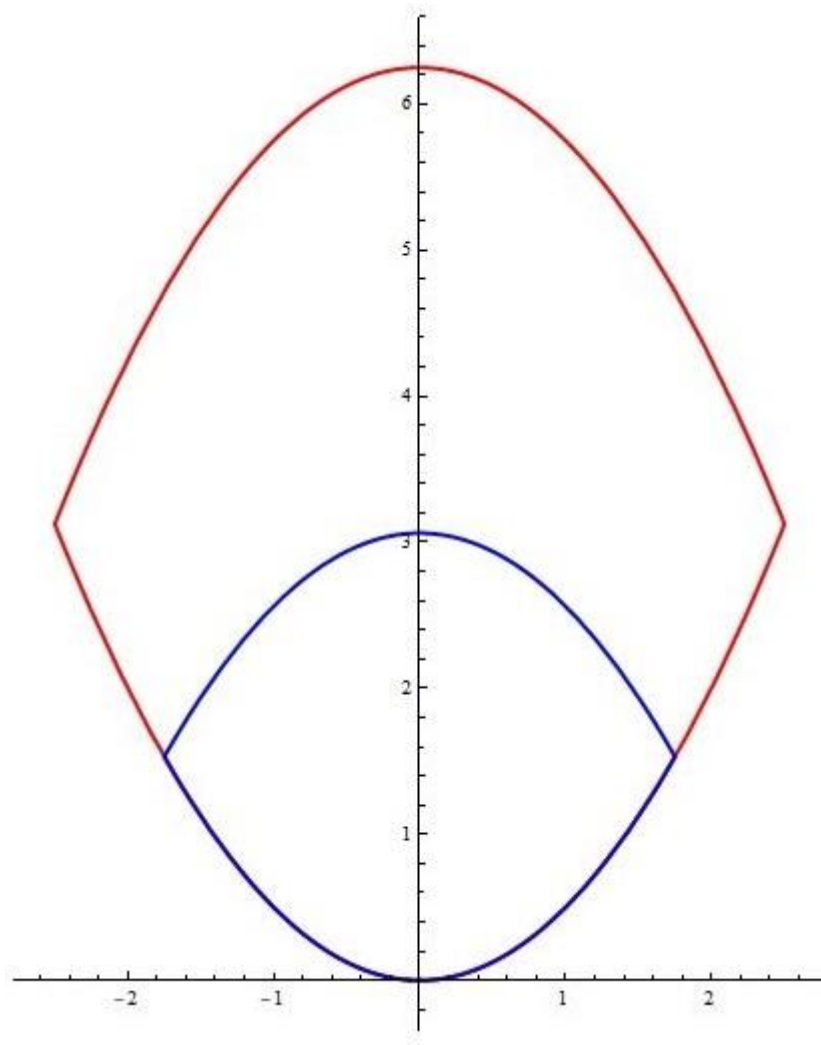


Рис. 6.

Задача 3.3. Перевіримо виконання умови повертальності на відрізку для системи (3.1) з кусково-сталим керуванням, яке має три точки перемикання t_1 , t_2 та t_3 . Таке керування має вигляд:

$$u = \begin{cases} 1, & t \in [0, T_1) \cup [T_2, T_3), \\ -1, & t \in [T_1, T_2) \cup [T_3, T]. \end{cases} \quad (3.5)$$

Тоді із умови повертальності (2.3) отримуємо алгебраїчну лінійну однорідну систему рівнянь для знаходження t_1, t_2, t_3 :

$$\begin{cases} 2t_1 - 2t_2 + 2t_3 - T = 0, \\ t_1^2 - t_2^2 + t_3^2 - \frac{T^2}{2} = 0. \end{cases}$$

Тепер дві змінні можуть бути вибраними в якості параметрів. Нехай це будуть T, t_1 . Тоді, розв'язавши систему відносно t_2, t_3 , знайдемо, що

$$\begin{cases} t_2 = \frac{T^2 + 4Tt_1 - 8t_1^2}{4(T - 2t_1)}, \\ t_3 = \frac{3T^2 - 4Tt_1}{4(T - 2t_1)}. \end{cases}$$

Таким чином, для заданого T існує безліч керувань вигляду (3.5), які розв'язують задачу повертальності початку координат в силу системи (3.1) з керуваннями, які мають три точки перемикання.

Фазова траєкторія, яка відповідає такому керуванню, знаходиться аналогічно тому, як це було зроблено для задачі 3.2.

На рис. 7 та рис. 8 наведені результати роботи програми для $T = 10$. Червоним зображені графіки координат $x_1(t)$ (тонка лінія), $x_2(t)$ (товста лінія) та фазова траєкторія, які відповідають значенню $t_1 = 1$. Синім зображені відповідні графіки, які відповідають значенню $t_1 = 0,7$.

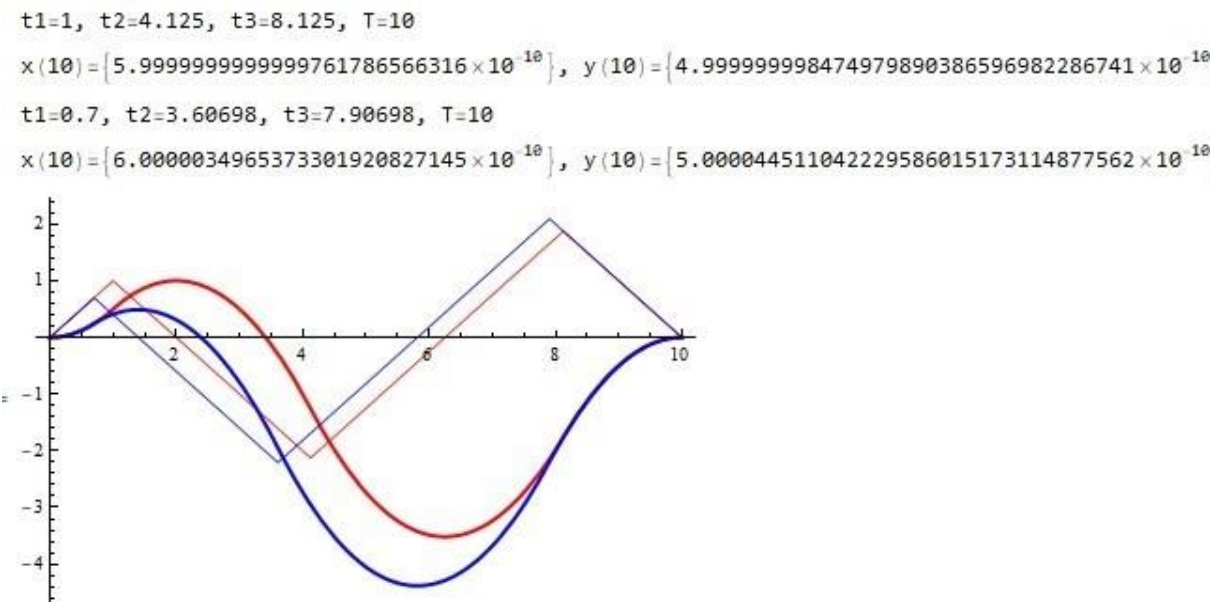


Рис. 7.

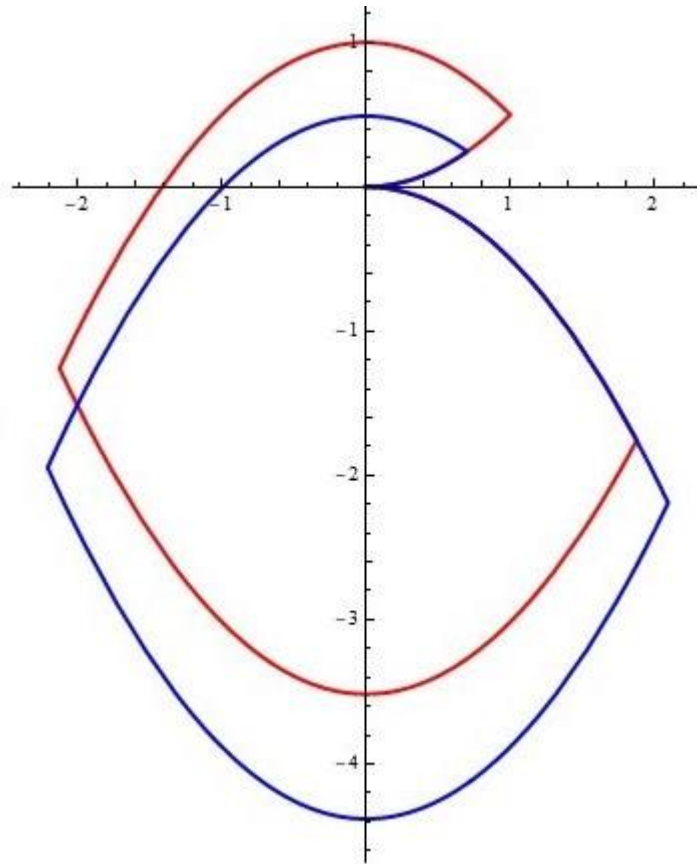


Рис. 8.

Задача 3.4. Розглянемо систему (3.1) з обмеженнями на керування вигляду $u \in \{c, 1\}$. Тоді кусково-стале керування з однією точкою перемикання буде мати вигляд:

$$u(t) = \begin{cases} c, & t \in [0, t_1) \\ -1, & t \in [t_1, T] \end{cases}, \quad 0 < t_1 < T. \quad (3.6)$$

Підставляючи $u(t)$ вигляду (3.6) в умову повертальності (2.3), маємо

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{-At} bu(t) dt &= \int_0^{t_1} e^{-At} bu(t) dt + \int_{t_1}^T e^{-At} bu(t) dt = \\
&= \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} dt - c \int_{t_1}^T \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} t_1 \\ -\frac{t_1^2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cT - ct_1 \\ -c\frac{T^2}{2} + c\frac{t_1^2}{2} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} t_1 + cT - ct_1 \\ -\frac{t_1^2}{2} - c\frac{T^2}{2} + c\frac{t_1^2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-c)t_1 + cT \\ -(1-c)\frac{t_1^2}{2} - c\frac{T^2}{2} \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Ця система відносно t_1 має розв'язок:

$$\begin{cases} (1-c)t_1 = -cT \\ (1-c)t_1^2 = -cT^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{-c}{1-c}T \\ t_1 = \sqrt{\frac{-c}{1-c}}T \end{cases} .$$

Якщо $c \neq 0$, то, як і для задачі 3.1, маємо, що $T = 0$. Це означає, що використовуючи керування з одним перемиканням вигляду (3.6), неможливо повернути нуль в нуль в силу системи (3.1).

4. Приклади розв'язання задач для лінійних систем третього порядку

Задача 4.1. Розглянемо канонічну керовану систему третього порядку

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1, \text{ з обмеженням на керування } u \in \{c, 1\}, c \neq 1, \\ \dot{x}_3 = x_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

та перевіримо виконання умови повертальності нуля для цієї системи.

Як і для задачі 3.1, знайдемо фундаментальну матрицю системи (4.1).

Для системи (4.1) матриця A та вектор b мають вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Власні числа матриці A дорівнюють 0. Тоді матриця e^{At} має вигляд

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} A^s = \frac{t^0}{0!} A^0 + \frac{t}{1!} A + \frac{t^2}{2!} A^2 = E + tA + \frac{t^2 A^2}{2} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вектор $e^{-At}b$ знайдемо, замінюючи t на $-t$:

$$e^{-At}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & -t & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що існує допустиме керування, яке повертає початок координат за час T в силу системи (4.1). Розглянемо кусково-стале керування $u(t)$ з двома точками перемикання t_1 та t_2 . Це керування матиме вигляд:

$$u = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1) \cup [t_2, T], \\ c, & t \in [t_1, t_2). \end{cases} \quad 0 < t_1 < t_2 < T. \quad (4.2)$$

Підставляючи $u(t)$ вигляду (4.2) в умову повертальності (2.3), маємо

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{-At} bu(t) dt &= \int_0^{t_1} e^{-At} bu(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-At} bu(t) dt + \int_{t_2}^T e^{-At} bu(t) dt = \\
&= \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -t \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} dt + c \int_{t_1}^{t_2} \begin{pmatrix} 1 \\ -t \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} dt + \int_{t_2}^T \begin{pmatrix} 1 \\ -t \\ \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} dt = \\
&= \begin{pmatrix} t_1 + ct_2 - ct_1 + T - t_2 \\ -\frac{t_1^2}{2} - c\frac{t_2^2}{2} + c\frac{t_1^2}{2} - \frac{T^2}{2} + \frac{t_2^2}{2} \\ \frac{t_1^3}{6} + \frac{t_2^3}{6} - \frac{t_1^3}{6} + \frac{T^3}{6} - \frac{t_2^3}{6} \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Отримуємо систему для знаходження t_1 та t_2 :

$$\begin{cases} (1-c)t_1 - (1-c)t_2 = -T \\ (1-c)t_1^2 - (1-c)t_2^2 = -T^2 \\ (1-c)t_1^3 - (1-c)t_2^3 = -T^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 - t_2 = -\frac{T}{1-c} \\ t_1^2 - t_2^2 = -\frac{T^2}{1-c} \\ t_1^3 - t_2^3 = -\frac{T^3}{1-c} \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо, що момент перемикання t_1 дорівнює 0 або T , що протирічить вибору t_1 . Отже, умова повертайності не виконується для системи (4.1) для керувань вигляду (4.2). Тобто, початок координат неможна повернути в початок координат в силу системи (4.1) з використанням керувань вигляду (4.2).

Задача 4.2. Розглянемо керовану систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_3 - u \\ \dot{x}_3 = -x_2 - 2x_3 \end{cases} \quad (4.3)$$

з обмеженням на керування $|u| \leq 1$ та перевіримо виконання умови повертальності нуля для цієї системи. Для цієї системи матриця A та вектор b мають вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Власні числа матриці A – $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -1$. Далі знаходимо, що

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - e^t - te^t & 1 + te^t & -1 + e^t + 3te^t \\ -te^t & 1 - e^t - 3te^t & 3 - 2e^t - 5te^t \end{pmatrix}.$$

Вектор $e^{-At}b$ знайдемо, замінивши t на $-t$:

$$e^{-At}b = \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-t} + 2te^{-t} \\ -1 + e^{-t} - 2te^{-t} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо кусково-стале керування $u(t)$ з однією точкою перемикання t_1 . Це керування матиме вигляд:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1) \\ -1, & t \in [t_1, T] \end{cases}, \quad \text{де } 0 < t_1 < T \quad (4.4)$$

Підставляючи керування (4.4) в умову повертальності (2.2), отримуємо:

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-At}bu(t)dt &= \int_0^{t_1} e^{-At}bu(t)dt + \int_{t_1}^T e^{-At}bu(t)dt = \\ &= \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-t} + 2te^{-t} \\ -1 + e^{-t} - 2te^{-t} \end{pmatrix} dt + \int_{t_1}^T \begin{pmatrix} -1 \\ e^{-t} - 2te^{-t} \\ 1 - e^{-t} + 2te^{-t} \end{pmatrix} dt = 0 \end{aligned}$$

Звідси маємо систему для знаходження t_1 :

$$\begin{cases} 2t_1 = T \\ 2e^{-t_1} + 4t_1e^{-t_1} = e^{-T} + 2Te^{-T} \\ 2t_1 - 2e^{-t_1} - 4t_1e^{-t_1} = T - e^{-T} - 2Te^{-T} \end{cases}.$$

Система має розв'язок лише при $T = 0$. Отже, використовуючи керування вигляду (4.4), неможливо повернути нуль в нуль в силу заданої системи (4.3).

Задача 4.3. Для системи (4.3) розглянемо кусково-стале керування $u(t)$ з двома точками перемикання t_1 та t_2 . Це керування матиме вигляд:

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in [t_1, t_2) \\ 1, & t \in [0, t_1) \cup [t_2, T] \end{cases}, \text{ де } 0 < t_1 < t_2 < T \quad (4.5)$$

Підставляючи керування (4.5) в умову повертайності (2.3), отримуємо:

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-At} b u(t) dt &= \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-t} + 2te^{-t} \\ -1 + e^{-t} - 2te^{-t} \end{pmatrix} dt + \int_{t_1}^{t_2} \begin{pmatrix} -1 \\ e^{-t} - 2te^{-t} \\ 1 - e^{-t} + 2te^{-t} \end{pmatrix} dt + \\ &+ \int_{t_2}^T \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-t} + 2te^{-t} \\ -1 + e^{-t} - 2te^{-t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} t_1 \\ -e^{-t_1} - 2t_1 e^{-t_1} \\ -t_1 + e^{-t_1} + 2t_1 e^{-t_1} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} -t_2 + t_1 \\ e^{-t_2} + 2t_2 e^{-t_2} - e^{-t_1} - 2t_1 e^{-t_1} \\ t_2 - e^{-t_2} - 2t_2 e^{-t_2} - t_1 + e^{-t_1} + 2t_1 e^{-t_1} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} T - t_2 \\ -e^{-T} - 2T e^{-T} + e^{-t_2} + 2t_2 e^{-t_2} \\ -T + e^{-T} + 2T e^{-T} + t_2 - e^{-t_2} - 2t_2 e^{-t_2} \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Звідси маємо систему для знаходження t_1 та t_2 :

$$\begin{cases} 2t_2 - 2t_1 = T \\ 2e^{-t_2} + 4t_2 e^{-t_2} - 2e^{-t_1} - 4t_1 e^{-t_1} = \tilde{T}_1 \\ 2t_2 - 2e^{-t_2} - 4t_2 e^{-t_2} - 2t_1 + 2e^{-t_1} + 4t_1 e^{-t_1} = \tilde{T}_2 \end{cases},$$

$$\text{де } \begin{cases} \tilde{T}_1 = e^{-T} + 2T e^{-T} \\ \tilde{T}_2 = T - e^{-T} - 2T e^{-T}. \end{cases}$$

5. Умова повертайності для трикутних систем

Дослідимо умову повертайності [1] для трикутних систем, які були введені в [2]. В загальному випадку ці системи не є лінійними, проте дослідження їх властивостей, зокрема, керованості та стабільності,

можна звести до дослідження відповідних властивостей канонічної системи відповідного порядку.

Розглянемо керовану систему вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, u). \end{cases}, \quad (5.1)$$

Системи виду (5.1) називаються трикутними системами.

Теорема 2 [2]. Нехай функції $f_i(x_1, x_2, \dots, x_{i+1})$, $i = \overline{1, n}$ мають неперервні частинні похідні до $(n - i + 1)$ порядку включно, та нехай $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}} \right| \geq a > 0$, $i = \overline{1, n}$ для всіх x_1, \dots, x_{n+1} , де a – стала, яка не залежить від x_1, \dots, x_{n+1} . Тоді систему (5.1) заміною змінних та керування можна звести до лінійної системи.

Як показано в [2], ця заміна змінних та керування має вигляд

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \equiv F_1(x_1) \\ z_2 &= f_1(x_1, x_2) \equiv F_2(x_1, x_2) \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{\partial F_{i-1}}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial F_{i-1}}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2, x_3) + \dots + \\ &+ \frac{\partial F_{i-1}}{\partial x_{i-1}} f_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_i) \equiv F_i(x_1, x_2, \dots, x_i), i = \overline{2, n}. \\ z_{n+1} &= \frac{\partial F_n}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial F_n}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2, x_3) + \dots + \\ &+ \frac{\partial F_n}{\partial x_n} f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \equiv F_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Після заміни (5.2) та (5.3) система (5.1) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3, \\ \dots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n, \\ \dot{z}_n = z_{n+1}, \end{cases} \quad \text{де } z_{n+1} \text{ – нове керування.} \quad (5.4)$$

Задача 5.1. Розглянемо трикутну систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sin x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases} \quad (5.5)$$

Функція $f_1(x_1, x_2) = \sin x_1 + x_2$ неперервно диференційовна, тому можемо зробити заміну (5.2) – (5.3), яка для системи (5.5) матиме вигляд

$$\begin{cases} z_1 = x_1, \\ z_2 = \sin x_1 + x_2, \\ z_3 = \cos x_1 (\sin x_1 + x_2) + u. \end{cases} \quad (5.6)$$

Після заміни (5.6) система (5.5) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3, \end{cases} \quad \text{де } z_3 \text{ – нове керування.}$$

Для зручності, позначимо $z_3 = v$. Отже, маємо канонічну керовану систему другого порядку:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = v. \end{cases} \quad (5.7)$$

Виконання умови повертальності на відріжку для системи (5.7) з використанням різних керувань були перевірені в задачах 3.1 – 3.4. Використаємо ці результати для побудови керувань, які розв'язують задачу про повернення початку координат в силу системи (5.5).

Якщо система (5.7) має обмеження на керування $v \in \{c, 1\}$, то за допомогою кусково-сталого керування з однією точкою перемикавання t_1 , неможливо повернути нуль в нуль в силу заданої системи (5.7), а, отже, і в силу системи (5.5).

Задача 5.2. Розглянемо випадок, коли керування $u(t)$ має дві точки перемикавання t_1 та t_2 . Кусково-стале керування буде мати вигляд:

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, t_1) \cup [t_2, T], \\ c, & t \in [t_1, t_2), \end{cases}, \quad 0 < t_1 < t_2 < T, \quad c \neq -1. \quad (5.8)$$

Підставляючи $u(t)$ вигляду (5.8) в систему (5.7) та умову повертальності (2.3), маємо, що

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-At} bu(t) dt &= \int_0^{t_1} e^{-At} bu(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-At} bu(t) dt + \int_{t_1}^T e^{-At} bu(t) dt = \\ &= \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} dt + c \int_{t_1}^{t_2} \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix} dt + \int_{t_2}^T \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} dt = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{t_1^2}{2} \\ -t_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-ct_2^2 + ct_1^2}{2} \\ ct_2 - ct_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{T^2 - t_2^2}{2} \\ -T + t_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} t_1^2(1+c) - t_2^2(1+c) + T^2 \\ -t_1(1+c) + t_2(1+c) - T \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Отримуємо систему, яка має єдиний розв'язок, для знаходження моментів перемикання t_1 та t_2 :

$$\begin{cases} t_1^2 - t_2^2 = \frac{-T^2}{1+c}, \\ -t_1 + t_2 = \frac{T}{1+c}. \end{cases}$$

Звідси маємо, що

$$\begin{cases} t_1 = \frac{cT}{2(1+c)}, \\ t_2 = \frac{(c+2)T}{2(1+c)}. \end{cases}$$

Наведемо результати роботи програми при $c = 0.5$ та різних значеннях T . Так, при $T = 5$ та при $T = 5.7$, маємо результати, які зображено на рис. 9. та рис. 10.

Фіолетовим зображені графіки координат $x_1(t)$ (тонка лінія), $x_2(t)$ (товста лінія) та фазова траєкторія, які відповідають значенню $T = 5$. Зеленим зображені графіки координат та фазова траєкторія, які відповідають значенню $T = 5.7$.

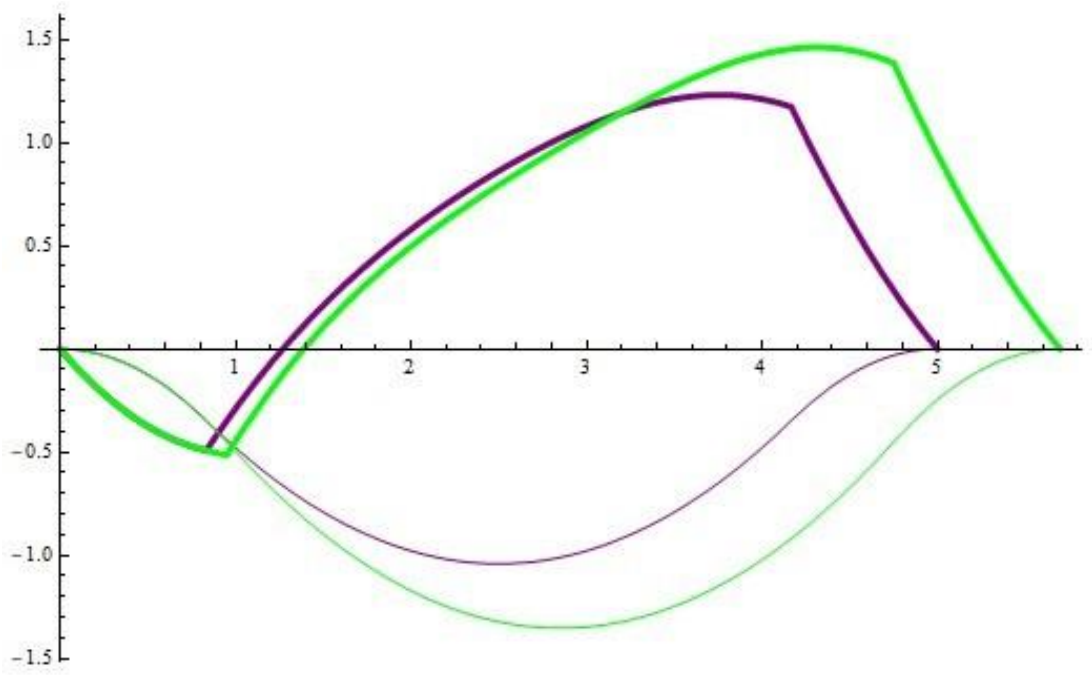


Рис.9.

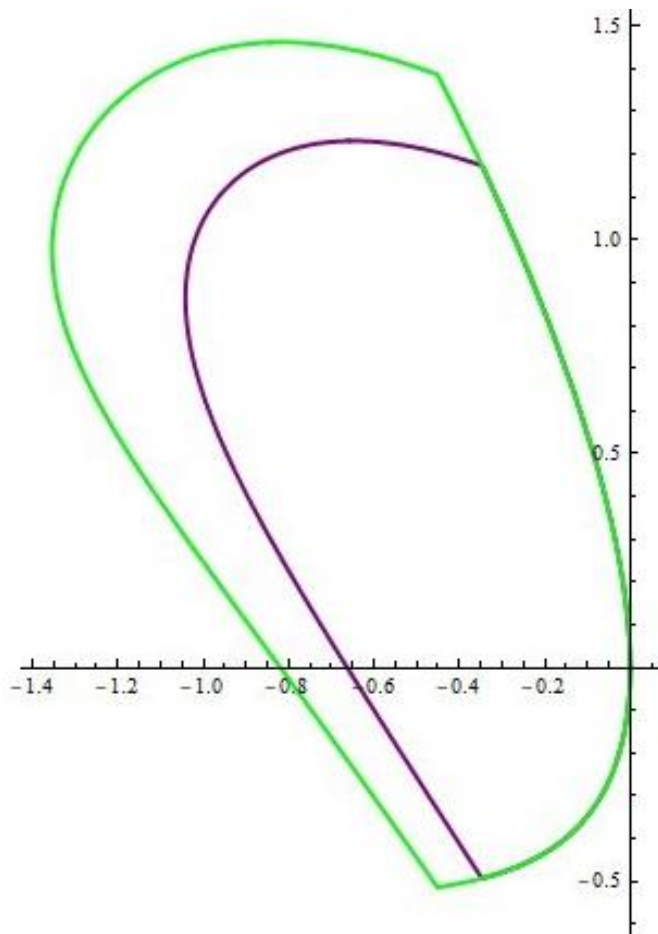


Рис.10

Задача 5.3. Розглянемо трикутну систему третього порядку

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = e^{x_1} - e^{x_2}, \\ \dot{x}_2 = -e^{x_1} + e^{x_3}, \\ \dot{x}_3 = -2e^{2x_1-x_3} + e^{x_1} - e^{x_3} + (e^{-x_2-x_3})u. \end{cases} \quad (5.10)$$

Зробимо заміну змінних та керування вигляду (5.2) та (5.3), яка для системи (5.10) матиме вигляд

$$\begin{cases} z_1 = x_1, \\ z_2 = e^{x_1} - e^{x_2}, \\ z_3 = e^{2x_1} - e^{x_2+x_3}, \\ z_4 = 2e^{3x_1} - u. \end{cases} \quad (5.11)$$

Після заміни (5.11), система (5.10) набуде вигляду

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = z_3, \\ \dot{z}_3 = v, \end{cases} \quad (5.12)$$

де для зручності позначено $z_4 = v_4$ – нове керування.

Перевіримо виконання умови повертальності (2.3) для системи (5.12) з обмеженнями на керування $|u| \leq 1$. Фундаментальна матриця системи (5.12) має вигляд

$$\begin{aligned} e^{At} &= \sum_{s=0}^2 \frac{t^s}{s!} A^s = \frac{t^0}{0!} A^0 + \frac{t}{1!} A + \frac{t^2}{2!} A^2 = E + tA + \frac{t^2}{2} A^2 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вектор $e^{-At}b$ знайдемо, замінивши t на $-t$:

$$e^{-At}b = \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що існує допустиме керування $|v| \leq 1$, яке повертає початок координат за час T в силу системи (5.12), а, отже, і в силу системи (5.11). Розглянемо кусково-стале керування v з двома точками перемикання t_1 та t_2 . Це керування матиме вигляд

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in [t_1, t_2], \\ 1, & t \in [0, t_1) \cup [t_2, T], \end{cases} \quad \text{де } 0 < t_1 < t_2 < T. \quad (5.13)$$

Підставивши керування (5.13) в умову повертальності (2.3), отримаємо систему для знаходження t_1 та t_2 :

$$\begin{cases} \frac{2t_1^3}{6} - \frac{2t_2^3}{6} = -\frac{T^2}{6}, \\ -\frac{2t_1^2}{2} + \frac{2t_2^2}{2} = \frac{T^2}{2}, \\ 2t_1 - 2t_2 = -T. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо, що момент перемикання t_1 дорівнює 0 або T , що протирічить вибору t_1 . Отже, умова повертальності не виконується для системи (5.12) для керувань вигляду (5.13). Тобто, початок координат неможна повернути в початок координат в силу системи (5.12) з використанням керувань вигляду (5.13). Отже, це неможливо зробити і в силу системи (5.11) з керуваннями вигляду (5.13).

Для керування з трьома точками перемикання одержимо, що $t_1 = \frac{(2-\sqrt{2})T}{4}$, $t_2 = \frac{T}{2}$, $t_3 = \frac{(2+\sqrt{2})T}{4}$. Нижче наведені результати роботи програми (графіки координат та фазові траєкторії системи (5.11)) для $T = 10$ та $T = 7$.

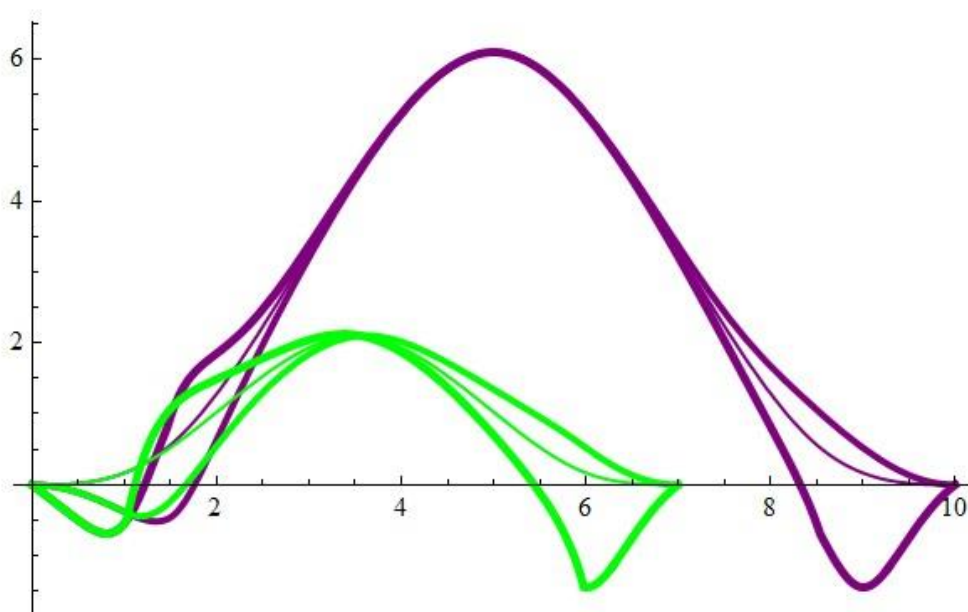
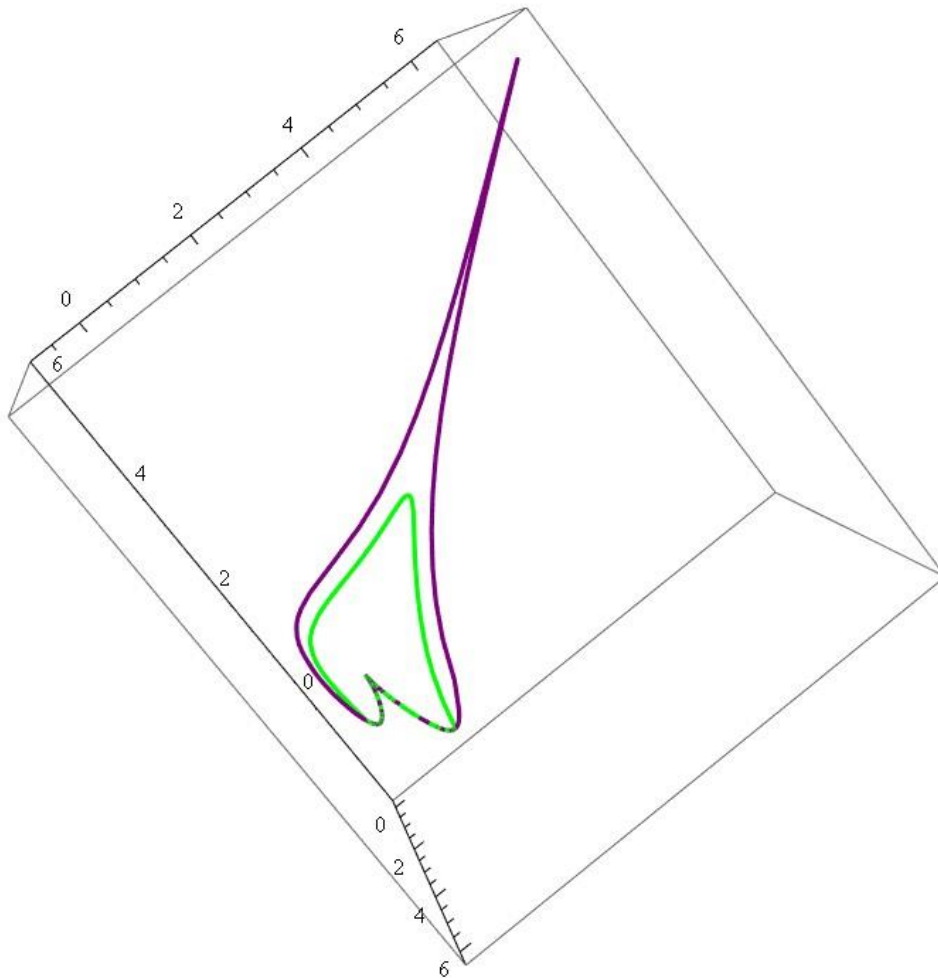


Рис. 11



$t_1=1.46447, t_2=5., t_3=8.53553, T=10$

$x(10)=\{5.144961587496660672440411434789726 \times 10^{-9}\}, y(10)=$
 $\{3.401360815440765858183482744886072 \times 10^{-9}\}, z(10)=\{5.97989254601024363266436452 \times 10^{-9}\}$

$t_1=1.02513, t_2=3.5, t_3=8.53553, T=7$

$x(7)=\{1.3804442492404532976343884684284488 \times 10^{-9}\}, y(7)=$
 $\{7.816533960686624412483114851862096 \times 10^{-10}\}, z(7)=\{1.421563480355472108546312647 \times 10^{-9}\}$

Рис. 12

6. Умова повертайності для довільних лінійних систем другого порядку, матриця яких має дійсні різні власні значення

Розглянемо тепер питання про виконання умови повертайності початку координат в силу довільної лінійної системи другого порядку, яка має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u, \end{cases} |u| \leq c, c > 0. \quad (6.1)$$

Для цього спочатку знайдемо фундаментальну матрицю системи (6.1). Для цієї системи матриця A та вектор b мають вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Власні значення матриці A мають вигляд

$$\lambda_1 = \frac{a_{11} + a_{22} - \sqrt{D}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{a_{11} + a_{22} + \sqrt{D}}{2},$$

$$D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}.$$

Якщо $D < 0$, то матриця системи має комплексні власні значення.

Якщо $D = 0$, то матриця системи має дійсні рівні власні значення.

Якщо $D > 0$, то матриця системи має дійсні різні власні значення.

Структура та вигляд матричної експоненти e^{At} залежать від власних значень матриці. Ми розглянемо випадок, коли матриця системи має дійсні різні власні значення, тобто, випадок, коли $D > 0$ та $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Додатково припустимо, що жодне власне значення не дорівнює 0 (цей випадок також потребує окремого розгляду, оскільки матрична експонента буде містити поліном та експоненту замість двох різних експонент).

Для знаходження інтерполяційного полінома Лагранжа-Сильвестра маємо рівняння

$$\begin{vmatrix} r(\lambda) & e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Отже, } r(\lambda)(\lambda_2 - \lambda_1) - e^{\lambda_1 t}(\lambda_2 - \lambda) + e^{\lambda_2 t}(\lambda_1 - \lambda) = 0 \text{ і}$$

$$r(\lambda) = \frac{e^{\lambda_1 t(\lambda_2 - \lambda)} - e^{\lambda_2 t(\lambda_1 - \lambda)}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} r(A) = e^{At} &= \frac{e^{\lambda_1 t}(\lambda_2 E - A) - e^{\lambda_2 t}(\lambda_1 E - A)}{\sqrt{D}} = \\ &= \begin{pmatrix} n_{11}e^{\lambda_1 t} - m_{11}e^{\lambda_2 t} & n_{12}e^{\lambda_1 t} - m_{12}e^{\lambda_2 t} \\ n_{21}e^{\lambda_1 t} - m_{21}e^{\lambda_2 t} & n_{22}e^{\lambda_1 t} - m_{22}e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

де введено такі позначення:

$$n_{ij} = \frac{a_{11} + a_{22} + \sqrt{D}}{2\sqrt{D}} - a_{ij}, \quad m_{ij} = \frac{a_{11} + a_{22} - \sqrt{D}}{2\sqrt{D}} - a_{ij}, \quad i = 1, 2, j = 1, 2.$$

Вектор $e^{-At}b$ знайдемо, замінивши t на $-t$:

$$e^{-At}b = \begin{pmatrix} (n_{11}e^{-\lambda_1 t} - m_{11}e^{-\lambda_2 t})b_1 + (n_{12}e^{-\lambda_1 t} - m_{12}e^{-\lambda_2 t})b_2 \\ (n_{21}e^{-\lambda_1 t} - m_{21}e^{-\lambda_2 t})b_1 + (n_{22}e^{-\lambda_1 t} - m_{22}e^{-\lambda_2 t})b_2 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо кусково-стале керування $u(t)$ з однією точкою перемикання t_1 , яке має вигляд

$$u(t) = \begin{cases} -c, & t \in [0, t_1), \\ c, & t \in [t_1, T], \end{cases} \quad \text{де } 0 < t_1 < T, \quad c \neq 0. \quad (6.2)$$

Підставляючи керування (6.2) в умову повертальності (2.3), маємо, що

$$\int_0^T e^{-At}bu(t)dt = \int_0^{t_1} e^{-At}bu(t)dt + \int_{t_1}^T e^{-At}bu(t)dt = I_1 + I_2.$$

Обчислимо ці інтеграли.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{t_1} e^{-At}bu(t)dt = \\ &= -c \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} (n_{11}e^{-\lambda_1 t} - m_{11}e^{-\lambda_2 t})b_1 + (n_{12}e^{-\lambda_1 t} - m_{12}e^{-\lambda_2 t})b_2 \\ (n_{21}e^{-\lambda_1 t} - m_{21}e^{-\lambda_2 t})b_1 + (n_{22}e^{-\lambda_1 t} - m_{22}e^{-\lambda_2 t})b_2 \end{pmatrix} dt = \\ &= -cb_1 \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} n_{11}e^{-\lambda_1 t} \\ n_{21}e^{-\lambda_1 t} \end{pmatrix} dt + cb_1 \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} m_{11}e^{-\lambda_2 t} \\ m_{21}e^{-\lambda_2 t} \end{pmatrix} dt - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -cb_2 \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} n_{12}e^{-\lambda_1 t} \\ n_{22}e^{-\lambda_1 t} \end{pmatrix} dt + b_2 \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} m_{12}e^{-\lambda_2 t} \\ m_{22}e^{-\lambda_2 t} \end{pmatrix} dt = \\
& = \frac{cb_1}{\lambda_1} \begin{pmatrix} n_{11}e^{-\lambda_1 t} |_0^{t_1} \\ n_{21}e^{-\lambda_1 t} |_0^{t_1} \end{pmatrix} - \frac{cb_1}{\lambda_2} \begin{pmatrix} m_{11}e^{-\lambda_2 t} |_0^{t_1} \\ m_{21}e^{-\lambda_2 t} |_0^{t_1} \end{pmatrix} + \\
& + \frac{cb_2}{\lambda_1} \begin{pmatrix} n_{12}e^{-\lambda_1 t} |_0^{t_1} \\ n_{22}e^{-\lambda_1 t} |_0^{t_1} \end{pmatrix} - \frac{cb_2}{\lambda_2} \begin{pmatrix} m_{12}e^{-\lambda_2 t} |_0^{t_1} \\ m_{22}e^{-\lambda_2 t} |_0^{t_1} \end{pmatrix} = \\
& = \frac{cb_1}{\lambda_1} \begin{pmatrix} n_{11}(e^{-\lambda_1 t_1} - 1) \\ n_{21}(e^{-\lambda_1 t_1} - 1) \end{pmatrix} - \frac{cb_1}{\lambda_2} \begin{pmatrix} m_{11}(e^{-\lambda_2 t_1} - 1) \\ m_{21}(e^{-\lambda_2 t_1} - 1) \end{pmatrix} + \\
& + \frac{cb_2}{\lambda_1} \begin{pmatrix} n_{12}(e^{-\lambda_1 t_1} - 1) \\ n_{22}(e^{-\lambda_1 t_1} - 1) \end{pmatrix} - \frac{cb_2}{\lambda_2} \begin{pmatrix} m_{12}(e^{-\lambda_2 t_1} - 1) \\ m_{22}(e^{-\lambda_2 t_1} - 1) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned}
I_2 & = \int_{t_1}^T e^{-At} bu(t) dt = \\
& = c \int_{t_1}^T \begin{pmatrix} (n_{11}e^{-\lambda_1 t} - m_{11}e^{-\lambda_2 t})b_1 + (n_{12}e^{-\lambda_1 t} - m_{12}e^{-\lambda_2 t})b_2 \\ (n_{21}e^{-\lambda_1 t} - m_{21}e^{-\lambda_2 t})b_1 + (n_{22}e^{-\lambda_1 t} - m_{22}e^{-\lambda_2 t})b_2 \end{pmatrix} dt = \\
& = \frac{cb_1}{\lambda_1} \begin{pmatrix} n_{11}(e^{-\lambda_1 t_1} - e^{-\lambda_1 T}) \\ n_{21}(e^{-\lambda_1 t_1} - e^{-\lambda_1 T}) \end{pmatrix} - \frac{cb_1}{\lambda_2} \begin{pmatrix} m_{11}(e^{-\lambda_2 t_1} - e^{-\lambda_2 T}) \\ m_{21}(e^{-\lambda_2 t_1} - e^{-\lambda_2 T}) \end{pmatrix} + \\
& + \frac{cb_2}{\lambda_1} \begin{pmatrix} n_{12}(e^{-\lambda_1 t_1} - e^{-\lambda_1 T}) \\ n_{22}(e^{-\lambda_1 t_1} - e^{-\lambda_1 T}) \end{pmatrix} - \frac{cb_2}{\lambda_2} \begin{pmatrix} m_{12}(e^{-\lambda_2 t_1} - e^{-\lambda_2 T}) \\ m_{22}(e^{-\lambda_2 t_1} - e^{-\lambda_2 T}) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
& \int_0^T e^{-At} bu(t) dt = I_1 + I_2 = \\
& = \frac{cb_1}{\lambda_1} \begin{pmatrix} n_{11}(2e^{-\lambda_1 t_1} - e^{-\lambda_1 T} - 1) \\ n_{21}(2e^{-\lambda_1 t_1} - e^{-\lambda_1 T} - 1) \end{pmatrix} - \frac{cb_1}{\lambda_2} \begin{pmatrix} m_{11}(2e^{-\lambda_2 t_1} - e^{-\lambda_2 T} - 1) \\ m_{21}(2e^{-\lambda_2 t_1} - e^{-\lambda_2 T} - 1) \end{pmatrix} + \\
& + \frac{cb_2}{\lambda_1} \begin{pmatrix} n_{12}(2e^{-\lambda_1 t_1} - e^{-\lambda_1 T} - 1) \\ n_{22}(2e^{-\lambda_1 t_1} - e^{-\lambda_1 T} - 1) \end{pmatrix} - \frac{cb_2}{\lambda_2} \begin{pmatrix} m_{12}(e^{-\lambda_2 t_1} - e^{-\lambda_2 T} - 1) \\ m_{22}(e^{-\lambda_2 t_1} - e^{-\lambda_2 T} - 1) \end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

Скоротивши на $c \neq 0$, отримаємо систему з двох рівнянь для знаходження моменту перемикання t_1 для заданого T . Очевидно, що це рівняння має розв'язок $t_1 = T = 0$, який означає, що умова повертальності початку координат в силу системи (6.1) з керуваннями вигляду (6.2) не виконується. Крім того, програма, розроблена в пакеті Mathematica, надає тільки такий розв'язок для різних систем. Проте зауважимо, що питання про існування інших розв'язків цієї системи має бути досліджено окремо.

Перевіримо тепер виконання умови повертальності початку координат в силу системи (6.1) з керуваннями, які мають дві точки перемикання, тобто, мають вигляд

$$u(t) = \begin{cases} -c, & t \in [0, t_1) \cup [t_2, T], \\ c, & t \in [t_1, t_2), \end{cases} \text{ де } 0 < t_1 < t_2 < T. \quad (6.3)$$

Провівши аналогічні обчислення, маємо систему рівнянь для знаходження моментів перемикання керування t_1 та t_2 для заданого значення T :

$$\begin{aligned} & \frac{cb_1}{\lambda_1} \left(\begin{matrix} n_{11}(2e^{-\lambda_1 t_1} - 2e^{-\lambda_1 t_2} + e^{-\lambda_1 T} - 1) \\ n_{21}(2e^{-\lambda_1 t_1} - 2e^{-\lambda_1 t_2} + e^{-\lambda_1 T} - 1) \end{matrix} \right) \\ & - \frac{cb_1}{\lambda_2} \left(\begin{matrix} m_{11}(2e^{-\lambda_2 t_1} - 2e^{-\lambda_2 t_2} + e^{-\lambda_2 T} - 1) \\ m_{21}(2e^{-\lambda_2 t_1} - 2e^{-\lambda_2 t_2} + e^{-\lambda_2 T} - 1) \end{matrix} \right) + \\ & + \frac{cb_2}{\lambda_1} \left(\begin{matrix} n_{12}(2e^{-\lambda_1 t_1} - 2e^{-\lambda_1 t_2} + e^{-\lambda_1 T} - 1) \\ n_{22}(2e^{-\lambda_1 t_1} - 2e^{-\lambda_1 t_2} + e^{-\lambda_1 T} - 1) \end{matrix} \right) \\ & - \frac{cb_2}{\lambda_2} \left(\begin{matrix} m_{12}(e^{-\lambda_2 t_1} - 2e^{-\lambda_2 t_2} + e^{-\lambda_2 T} - 1) \\ m_{22}(e^{-\lambda_2 t_1} - 2e^{-\lambda_2 t_2} + e^{-\lambda_2 T} - 1) \end{matrix} \right) = 0. \end{aligned}$$

Питання про існування та кількість розв'язків такої системи теж має бути досліджено. Однак, чисельний експеримент дає можливість розв'язати цю систему для заданої (конкретної) керованої системи та заданого значення часу T . Нижче наведені результати роботи програми (графіки координат та фазові траєкторії) системи (6.1) з такими даними:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ та $T = 3$ та $T = 5$. Для $T = 3$ маємо моменти

перемикання $t_1 = 0.2305616$ та $t_2 = 2.3797382$; кінцева точка $x_1(3) = -3.8335224 \times 10^{-7}$, $x_2(3) = -7.6687850 \times 10^{-7}$. Для $T = 5$ маємо моменти перемикання $t_1 = 0.2310475$ та $t_2 = 4.31704133$; кінцева точка $x_1(5) = 0.0153727$, $x_2(5) = 0.0307455$. Графіки червоного кольору відповідають $T = 5$, а синього кольору – $T = 3$.

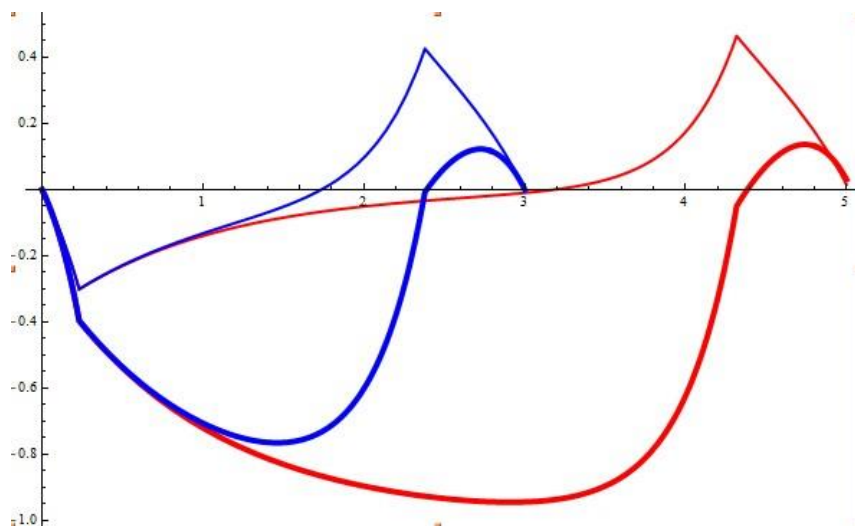


Рис.13

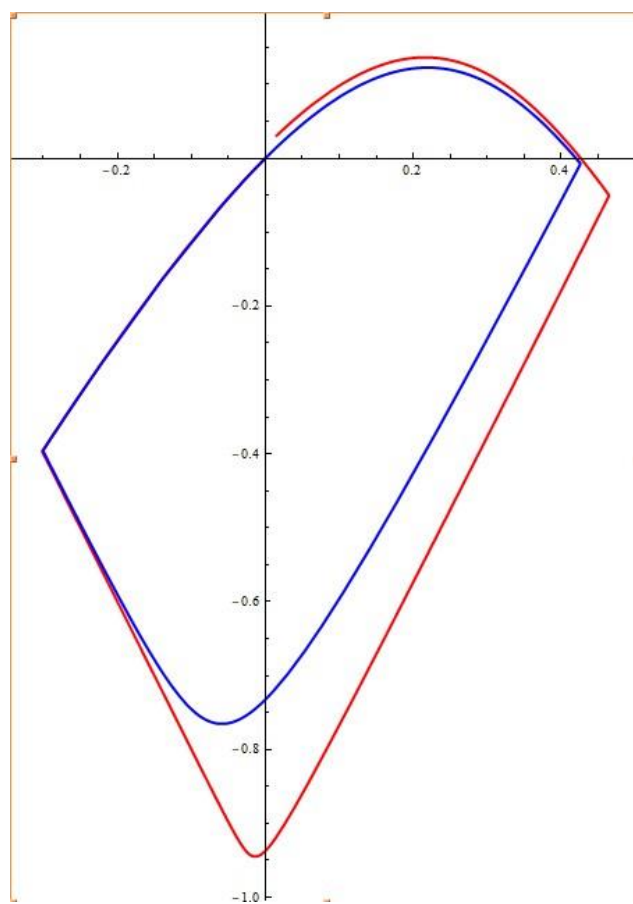


Рис.14

6. Висновки

В роботі досліджено задачу повертайності початку координат в силу лінійних та трикутних систем другого і третього порядку з керуваннями, які задовольняють різні обмеження та мають різну кількість точок перемикання. Так, показано, що при керуваннях з кількістю точок перемикання меншою, ніж порядок системи, умова повертайності не виконується. При керуваннях, які мають кількість точок перемикання, що дорівнює порядку системи, для кожного заданого T , існує єдине керування, яке розв'язує поставлену задачу. При керуваннях же, які мають кількість точок перемикання більше, ніж порядок системи, для кожного заданого T , існує безліч керувань, які розв'язують поставлену задачу.

Для довільних лінійних систем другого порядку, матриця яких має дійсні різні власні значення (крім нульового) також перевірено умову повертайності початку координат. Деякі питання, пов'язані з такими системами, залишились відкритими.

Усі результати проілюстровано прикладами.

Список літератури.

1. V.I. Korobov. Geometric Criterion for Controllability under Arbitrary Constraints on the Control, J. of Optim. Theory and Applications, 2007, Vol. 134, p. 161–176.
2. Korobov V.I. Controllability, stability of certain nonlinear systems. Differ. Uravn., 1973, 9:4, pp. 614–619.
3. Коробов В.И. Метод функции управляемости— Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007г.
4. В.І. Коробов, Т.І. Сморцова. *Керованість та стабілізація*, навчальний посібник, видавництво ХНУ імені В.Н. Каразіна, 2017 р.
5. L.S. Pontryagin. Selected works, V. 4. The Mathematical Theory of Optimal Processes. CRC Press, 1987, 360 p.